数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 1-6

ブロック・イデアルのコホモロジー環

佐々木 洋城
Sasaki, Hiroki
信州大学全学教育機構
Shinshu University, School of General Education

1 対称多元環

block ideal のコホモロジーを語るとき，（目下のところ）Hochshild コホモロジー環との関わりの中で考えざるをえない. そこで, はじめに, 関連事項を振り返っておく.

R を単位元を含む可換環とする. A を対称 R 多元環とする. すなわち, (A, A)-両側加群としての同型

$$\Phi : A \to A^* = \mathrm{Hom}_R(A, R)$$

が指定されている. $\sigma = \Phi(1) : A \to R$ とおく. 任意の $\alpha, \alpha' \in A$ に対して $\sigma(\alpha\alpha') = \sigma(\alpha'\alpha)$ が成り立つ. このことから, σ を A の対称化形式とよぶ. (A, A)-両側加群としての同型 $A \to A^*$ はひと通りではなく, 従って, A の対称化形式のとり方もひと通りではない.

B も対称 R 多元環とする. 以下は A, B の対称化形式を固定しての話である.

(A, B)-両側加群 X に対して $X^* = \mathrm{Hom}_R(X, R)$ を X の R-dual とする.

(A, B)-両側加群 X が左 A-加群として有限生成射影的であり, 右 B-加群としても有限生成射影的であるとき, 次が成り立つ:

(1) $\mathrm{Hom}_A(X, A) \simeq X^* \simeq \mathrm{Hom}_B(X, B)$.
(2) 左 A-加群 L と左 B-加群 M について $\mathrm{Hom}_A(X \otimes_B M, L) \simeq \mathrm{Hom}_B(M, X^* \otimes_A L)$.

(1) の同型は, 例えば, $\varphi : {}_AX \to A$ に対して $\sigma\circ\varphi : X \to R$ を対応させることで得られる.

(2) の同型は, (2) の同型の特別な場合として得られる

$${}_X\varepsilon : X \otimes_B X^* \to A, \quad {}_X\eta : A \to X \otimes_B X^*$$

を用いて記述される. これらを adjunction maps とよぶ. adjunction maps を用いて Hochshild コホモロジー環の transfer 写像

$$t_{{}_AX_B} : HH^*(B) \to HH^*(A),$$
$$t_{{}_BX^*_A} : HH^*(A) \to HH^*(B)$$

が定義される. 特に, 0 次の Hochshild コホモロジーは多元環の中心に同型であることから $t_{{}_AX_B}(1_B) \in HH^0(A)$ に対応する $Z(A)$ の元を π_X とかく. また $t_{{}_BX^*_A}(1_A) \in HH^0(B)$ に対応する $Z(B)$ の元を π_{X^*} とかく. これらを**相対射影元**とよぶ.

写像

$$\mathrm{Ext}^*_{A\otimes A^{\mathrm{op}}}(A, A) \to \mathrm{Ext}^*_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(X, X); \zeta \mapsto \zeta \otimes 1_X$$
$$\mathrm{Ext}^*_{B\otimes B^{\mathrm{op}}}(B, B) \to \mathrm{Ext}^*_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(X, X); \theta \mapsto 1_X \otimes \theta$$

との pullback を $HH^*(A)\times_X HH^*(B)$ と書く:

$$HH^*(A)\times_X HH^*(B)=\{\,(\zeta,\theta)\in HH^*(A)\oplus HH^*(B)\mid \mathrm{Res}_X(\zeta)={}_X\mathrm{Res}(\theta)\,\}.$$

$$\begin{tikzcd} HH^*(A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^*_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(X,X) \\ HH^*(A)\times_X HH^*(B) \arrow[u] \arrow[r] & HH^*(B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$(\zeta,\theta)\in HH^*(A)\times_X HH^*(B)$ を X-stable pair とよぶことにする. $(\zeta,\theta)\in HH^*(A)\oplus HH^*(B)$ が X-stable pair であることと $(\theta,\zeta)\in HH^*(B)\oplus HH^*(A)$ が X^*-stable pair であることとは同値である. それゆえ, $\zeta\in HH^*(A)$ は X-stable であるといい, $\theta\in HH^*(B)$ は X^*-stable であるという. ただし, $\zeta\in HH^*(A)$ が X-stable であるというとき, 相棒の $\theta\in HH^*(B)$ の存在を忘れてはならない.

$$HH^*_X(A)=\{\,\zeta\in HH^*(A)\mid \zeta\text{ は }X\text{-stable である}\,\},$$
$$HH^*_{X^*}(B)=\{\,\theta\in HH^*(B)\mid \theta\text{ は }X^*\text{-stable である}\,\}$$

をそれぞれ X-stable subring, X^*-stable subring とよぶ.

相対射影元 $\pi_X\in Z(A)$ が可逆のとき, 正規化された transfer 写像

$$T_X: HH^*(B)\to HH^*(A);\theta\mapsto {\pi_X}^{-1}t_X(\theta)$$

は, その定義域を X^*-stable subring $HH^*_{X^*}(B)$ に制限すれば X-stable subring $HH^*_X(A)$ への全射となる. この写像を R_X と書く：

$$R_X: HH^*_{X^*}(B)\twoheadrightarrow HH^*_X(A);\theta\mapsto {\pi_X}^{-1}t_X(\theta).$$

ここで注意しなければならないことは, ${T_X}^{-1}(HH^*_X(A))=HH^*_{X^*}(B)$ であると主張しているわけではないということである.

もし, さらに, $\pi_{X^*}\in Z(B)$ も可逆ならば, 全射 $R_{X^*}: HH^*_X(A)\twoheadrightarrow HH^*_{X^*}(B)$ が得られ, 同型

$$R_X: HH^*_{X^*}(B)\xrightarrow{\sim} HH^*_X(A)$$

が得られる. すなわち, 制限かつ正規化された transfer 写像により, stable elements 同士は互いに移り合うのである

2 ブロックのコホモロジー環

B を kG の block ideal とし, D をその defect 群とする. このとき B を直既約 $k[G\times G^{\mathrm{op}}]$-加群とみて, $\Delta D=\{\,(a,a^{-1})\mid a\in D\,\}$ を vertex としてもつ. B の $k[G\times D^{\mathrm{op}}]$-加群としての直和因子 X で ΔD を vertex にもつものを B の source 加群とよぶ. source 加群は互いに同型であるとは限らないが, それらは $N_G(D)$ で共役である：X と X' がともに B の source 加群ならばある $t\in N_G(D)$ によって $X'\simeq X\otimes t$ である. source 加群 X は source べき等元 $i\in B^D$ を用いて, $X=kGi$ と表される.

source 加群 $X=kGi$ を指定する. $\mathrm{Br}^G_D(i)\in kC_G(D)$ は原始的である. 従って, Brauer construction

$$X(D)=X^D\Big/\sum_{Q<D}\mathrm{Tr}^D_Q X^Q\simeq kC_G(D)\,\mathrm{Br}^G_D(i)$$

は直既約左 $kC_G(D)$-加群である. よって, $kC_G(D)$ のただひとつの block ideal $kC_G(D)e_D$ に属する. このとき, $k[DC_G(D)]$ の block ideal $b_D=k[DC_G(D)]e_D$ をとれば, (D,b_D) は Sylow

B-subpair である. (D, b_D) は source module X (D_γ) に associate されるという. ここでは Sylow (B, X)-subpair とよぶことにする. Sylow (B, X)-subpair (D, b_D) から定められる圏

$$\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X) = \{ (Q, b_Q) \mid (Q, b_Q) \leqslant (D, b_D) \}$$

を考える. (Q, b_Q) から (R, b_R) への morphism は $x \in G$ で ${}^x(Q, b_Q) \leqslant (R, b_R)$ をみたすものが引き起こす共役写像 $c_x : Q \to R; a \mapsto {}^x a$ である. このような $x \in G$ のなす集合を $T_G((Q, b_Q), (R, b_R))$ と書く. 圏 $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X)$ を Brauer 圏とよぶ.

定義 2.1 (Linckelmann [2]) いままでの記号の下で, ブロック B のコホモロジー環を次のように定義する. $\zeta \in H(D, k)$ が条件

$$\mathrm{res}_Q {}^g\zeta = \mathrm{res}_Q \zeta \quad \forall (Q, b_Q) \leqslant (D, b_D)\ \forall g \in N_G(Q, b_Q)$$

をみたすとき, ζ は $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X)$-stable であるという. D のコホモロジー環 $H(D, k)$ の部分集合

$$H(G, B; X) = \{ \zeta \in H(D, k) \mid \zeta \text{ は } \mathscr{F}_{(D,b_D)}(B, X)\text{-stable} \}$$

を B の (X によって定められる) コホモロジー環とよぶ.

Linckelmann はさらに次を示した. 通常のコホモロジー環はいわゆる diagonal embedding により Hochshchild コホモロジー環に埋め込まれるのだが, ブロックのコホモロジー環はこの diagonal embedding によって Hochshchild コホモロジー環の中ではある stable な部分環に含まれる. すなわち

定理 2.1 (Linckelmann) 今までの記号の下で

$$\zeta \in H^*(G, B; X) \Longrightarrow \delta_D\zeta \in HH^*(kD) \text{ は } {}_{kD}ikGi_{kD}\text{-stable である.}$$

ここで, $ikGi = X^* \otimes_B X$ であり, (kD, kD)-両側加群とみている. $ikGi$ は群環 kG の (kD, kD)-両側加群としての直和因子であり, それ自身環である. ブロック B も source algebra とよばれ, B と多くの環論的性質を共有している.

これの逆が成り立つことを示した.

定理 2.2 ([4]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(D, k)$ について, $\delta_P\zeta \in HH^*(kD)$ ${}_{kD}ikGi_{kD}$-stable であるならば, ζ は $H^*(G, B; X)$ に属する.

これらをまとめると, $\zeta \in H^*(D, k)$ について,

$$\zeta \in H^*(G, B; X) \Longleftrightarrow \delta_D\zeta \in HH^*(kD) \text{ は } {}_{kD}ikGi_{kD}\text{-stable である.}$$

例 2.1 B_0 を principal block とする. defect 群 は G の Sylow p-部分群である. その一つを P とする. e_0 を B_0 の block べき等元とする. すなわち, $e \in Z(kG)$ で $B_0 = kGe_0$ である. 任意の $Q \leqslant P$ について, $\mathrm{Br}_Q(e_0) \in kC_G(Q)$ は原始的である. (Brauer の第 3 主定理) つまり, $(Q, \mathrm{Br}_Q(e_0))$ は B_0-subpair である. ゆえに, $(Q, b_Q) \leqslant (P, \mathrm{Br}_P(e_0))$ ならば, $(Q, b_Q) = (Q, \mathrm{Br}_P(e_0))$ が成り立つ.

よって, 任意の $N_G(Q, b_Q) \leqslant (P, b_P)$ に対して $N_G(Q, b_Q) = N_G(Q)$ が成り立つ. すなわち

$$H^*(G, B_0) = \{ \zeta \in H^*(P, k) \mid \zeta \text{ は } G \text{ 安定} \}$$

を得る. 通常のコホモロジー環 $H(G, k)$ についてのいわゆる stable element theorem により

$$\begin{aligned} &= \mathrm{Im}\left[\mathrm{res}_P : H^*(G, k) \to H^*(P, k) \right] \\ &\simeq H^*(G, k) \end{aligned}$$

このように, principal block においては, その block べき等元によって Brauer 圏が決まってしまうのである. しかし, 一般の block にあっては, このようなことは期待できない. むしろ, そのゆえに, コホモロジーという道具をかぶせることによって, B-subpair の様子を調べようとしたのかもしれない.

例 2.2 一般の block ideal に戻り, 以前の記号を使う. defect 群 D が G で正規であるとき

$$_{kD}ikGi_{kD} = \bigoplus_{gDC_G(D)\in N_G(D,b_D)/DC_G(D)} k[gD]$$

であるから, $\zeta \in H^*(D,k)$ について,

$$\zeta \text{ が } {}_{kD}ikGi_{kD}\text{-stable である} \Longleftrightarrow {}^g\zeta = \zeta \quad \forall g \in N_G(D,b_D).$$

よって

$$H^*(G,B;X) = H^*(D,k)^{N_G(D,b_D)}.$$

例 2.3 defect 群 D が可換のとき, $T = N_G(D,b_D)$ は Brauer 圏 $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B,X)$ における fusion を統制する. すなわち, 任意の $(Q,b_Q) \leqslant (D,b_D)$ について

$$N_G(Q,bQ) = N_T(Q,bQ)C_G(Q)$$

が成り立つ. よって, 任意の $H^*(D,k)^T$ は安定性条件をみたし

$$H^*(G,B;X) = H^*(D,k)^{N_G(D,b_D)}$$

であることがわかる.

例 2.4 G が p-可解群のときを考える. Harris–Linckelmann ([1] etc) により詳しく調べられている. e を B の block べき等元とする : $B = kGe$. G のある部分群 H と H-stable な $O_{p'}(H)$ の block ideal $b = kO_{p'}(H)f$ が存在して次が成り立つ :

(1) $O_{p'}(G) \leqslant H$, $f \in Z(kO_{p'}(H))$ は $Z(kH)$ でも原始的である. よって, $C = kHf$ は kH の block ideal である.

$$e = \sum_{xH\in G/H} {}^xf$$

とおく.

(2) D は C の defect 群でもあり, X は C の source 加群でもある. D は H の Sylow p-部分群であり, さらに $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B,X)$ と $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(C,X)$ は同値である. それゆえ, $H^*(G,B;X) = H^*(H,C;X)$ である !

(3) 任意の $Q \leqslant D$ について, $\mathrm{Br}_Q(f) \in kC_G(Q)$ は原始的である. すなわち, $k[QC_G(Q)]\,\mathrm{Br}_Q(f)$ は $k[QC_G(Q)]$ の block ideal である. ちょうど principal block と同じような状況であり, $N_H(Q,\mathrm{Br}_Q(f)) = N_H(Q)$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} H^*(H,C;X) &= \{\zeta \in H^*(D,k) \mid \zeta \text{ は } H\text{-stable}\} \\ &\simeq H^*(H,k). \end{aligned}$$

例えば,

(1) $H^*(G,B;X) = H^*(D,k)$ ならば Tate の定理により, H は normal p-complement をもち, block C はべき零である. $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(B,X)$ と $\mathscr{F}_{(D,b_D)}(C,X)$ は同値であるから, B もべき零である.

(2) 任意の素 ideal $\mathfrak{p} \subset H^*(G,B;X)$ が $H^*(D,k)$ のある素 ideal $\mathfrak{q}$ を用いて $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap H^*(G,B;X)$ と表されるならば, Quillen の定理により, B はべき零である.

これらは, もちろん, 一般の群についても正しいと信じられていることである. しかし, 未だその証明は文献には見られないと思う.

3 Brauer 対応

ここでは, 講演では述べられなかったが, その後わかったことをつけ加えておきたい.

H を G の部分群で
$$DC_G(D) \leqslant H$$
であるものと仮定する. C を kH の block ideal とし,
$$C^G = B, \quad D \text{ は } C \text{ の defect 群である}$$
と仮定する.

B の source module X と C の source module Y は $(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}})$ に関する Green 対応で対応していると仮定する.

直既約 $k[H\times H^{\mathrm{op}}]$-加群 C の $G\times H^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent を L とおく.

このとき

定理 3.1 (Sasaki [5]) (1) L が定める相対射影元 $\pi_L \in Z(B)$ および L^* が定める相対射影元 $\pi_{L^*} \in Z(C)$ は可逆である.

(2)
$$L^*\otimes_B X \simeq Y \oplus O(\mathscr{Y}(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}})).$$

(3)
$$L\otimes_{kH} Y \simeq X \oplus Z$$
と直和分解され, Z の直既約直和因子は $\mathscr{X}(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}})$-射影的で, trivial source をもつ.

(4) $D \lhd H$ ならば, $L\otimes_{kH} Y \simeq X$.

(5) $L \mid X\otimes_{kD} Y^*$ である.

(6) Sylow C-subpair (D, b_D) を $b_D Y(D) \neq 0$ととる. (D, b_D) は Sylow B-subpair でもあり, さらに, $b_D X(D) \neq 0$ である. この Sylow subpair によって定められるコホモロジー環について, 次は可換である：

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,B;X) \arrow[r, tail, "\delta_D"] & HH^*_{X^*}(kD) \arrow[r, shift left, two heads, "R_X"] & HH^*_X(B) \arrow[l, shift left, two heads, "R_{X^*}"] & \\
 & HH^*_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}(kD) \arrow[u, hook] \arrow[r, shift left, two heads, "R_X"] \arrow[d, equal] & HH^*_{L\otimes_C Y}(B) \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, two heads, "R_{X^*}"] \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left, two heads, "R_{L^*}"] & HH^*_L(B) \arrow[d, shift left, two heads, "R_{L^*}"] \\
 & HH^*_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}(kD) \arrow[d, hook] \arrow[r, shift left, two heads, "R_Y"] & HH^*_{L^*}(C)\cap HH^*_Y(C) \arrow[d, hook] \arrow[l, shift left, two heads, "R_{Y^*}"] \arrow[u, shift left, two heads, "R_L"] \arrow[r, hook] & HH^*_{L^*}(C) \arrow[u, shift left, two heads, "R_L"] \\
H^*(H,C;Y) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, shift left, two heads, "R_Y"] & HH^*_Y(C) \arrow[l, shift left, two heads, "R_{Y^*}"] &
\end{tikzcd}$$

この記号の下で

定理 3.2

$$H^*(G,B;X) \subseteq H^*(H,C;Y) \Longleftrightarrow \delta_D H^*(G,B;X) \subseteq HH^*_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}(kD).$$

この条件が成り立つとき, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,B) \arrow[r, tail, "\delta_D"] \arrow[d, hook] & HH^*_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}(kD) \arrow[r, tail, two heads, shift left, "R_X"] \arrow[d, hook] & HH^*_{L\otimes_C Y}(B) \arrow[l, tail, two heads, shift left, "R_{X^*}"] \arrow[d, tail, "R_{L^*}"] \\
H^*(H,C) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, tail, two heads, shift left, "R_Y"] & HH^*_Y(C) \arrow[l, tail, two heads, shift left, "R_{Y^*}"]
\end{tikzcd}$$
.

参考文献

[1] M. E. Harris and M. Linckelmann, Splendid derived quivalences for blocks of finite p-solovable groups, J. London Math. Soc. **62** (2000), 85–96.

[2] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[3] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.

[4] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory, submitted.

[5] H. Sasaki, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence II, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), 445–465.